Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.
IX klass
Lahendusvõimalusi ja juhiseid hindamiseks.

1.ülesanne.

Leida avaldise väärtus.

$$\frac{20072008^3 + 20062007^3}{40134015} - 20072008 \cdot 20062007$$

Lahendus

Tähistame 20072008 = a ja 20062007 = b, siis 40134015 = a + b ja kogu avaldis saab kuju

$\dfrac{a^3+b^3}{a+b} - a \cdot b$, mida lihtsustades saame

$\dfrac{a^3+b^3}{a+b} - a \cdot b = \dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a+b} - ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ja seega on avaldise väärtus $(20072008–20062007)^2 = 10001^2 = 100020001$

Vastus. Avaldise väärtus on 100020001.

Hindamine:

tegevus	punkte
Lugeja tegurdamine kuupide summa valemi abil	1
Nimetaja sobivate liidetavate kaudu avaldamine	1
Murru taandamine	1
Sarnaste liikmete koondamine	1
Vahe ruudu valemi kasutamine	1
Arvu 10001 ruudu 100020001 arvutamine	1
Õige vastus	1
kokku	7

Märkus: Kui avaldise arvutamiseks pole kasutatud lihtsustamise võimalust, aga tulemus on õige ja arvutused on näidatud, tuleb anda 7 punkti (arvutustöö mahukus ja ajakulu on isegi karistuseks). Ka pole oluline 20072008 ja 20062007 algebraline tähistamine kuna lihtsustada saab ka arvavaldisena.

Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.
IX klass
Lahendusvõimalusi ja juhiseid hindamiseks.

2.ülesanne

Ants sõidab hommikul tööle 25% võrra suurema kiirusega kui õhtul sama teed pidi töölt koju. Mitme protsendi võrra on Antsu töölesõidu aeg kojusõidu ajast väiksem?

Lahendus.

Olgu teepikkus s ja kojusõitmise kiirus v, siis aega kulub koju sõitmiseks $t_1 = \frac{s}{v}$.

Kiirus tööle sõites on 25% võrra suurem ehk 1,25v ning aega kulub $t_2 = \frac{s}{1{,}25v}$.

Aega kulub tööle sõiduks vähem võrreldes kojusõidu ajaga

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1} = \frac{\frac{s}{v} - \frac{s}{1{,}25v}}{\frac{s}{v}} = \frac{\frac{0{,}25s}{1{,}25v}}{\frac{s}{v}} = \frac{0{,}25sv}{1{,}25sv} = \frac{1}{5}\, ehk\, 20\%$$

Vastus. Kui töölesõidu kiirus on kojusõidu kiirusest 25% võrra suurem, siis kulub töölesõiduks 20% võrra vähem aega kui kojusõiduks

Hindamine:

tegevus	punkte
Aja, teepikkuse ja kiiruse vahelise seose valemi kasutamine	1
Kojusõidu aja määramine	1
Tööle sõidu kiiruse määramine väiksema kiiruse ja 25% kaudu	1
Tööle sõidu aja määramine	1
Sõiduaegade erinevuse leidmine	1
Sõiduaegade võrdlemine protsentides (aegade erinevuse ja kojusõidu aja suhe)	1
Õige vastus: 20% võrra	1
kokku	7

Märkus: Kui ülesande lahendamiseks on ise võetud konkreetsed teepikkused ja kiirused ning nende kaudu jõutud õige lõpptulemuseni, siis anda 7 punkti juhul, kui on lisatud, et ei kiiruse ega teepikkuse suurusest ei olene lõppvastus, sellise märkuse mittelisamise korral anda mitte üle 5 punkti.

Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.
IX klass
Lahendusvõimalusi ja juhiseid hindamiseks.

3.ülesanne

Arvu 2008 jagamisel kaksikalgarvude korrutisega tekib jagatis 6 ja jääk 70. Leida need kaksikalgarvud. (Kaksikalgarvudeks nimetatakse algarve, millede vahe on 2)

Lahendus I.

Olgu esimene algarvudest x, siis teine on x + 2. Et jagades ei tekiks jääki 70, vähendame jagatavat 70 võrra ja saame võrrandi

6x(x + 2) = 1938 millest $x_1 = -19$ (ei sobi, kuna pole algarv) ja $x_2 = 17$

Seega otsitavad algarvud on 17 ja 19

Kontroll. Kui kaksikalgarvudeks on 17 ja 19, siis 2008 jagamisel nende korrutisega saame 2008:17:19 = 6 jääk 70, mis vastab ülesande tingimustele.

Vastus.
Kaksikalgarvud, millede korrutisega arvu 2008 jagades saame 6 jäägiga 70 on 17 ja 19.

Ehk
Lahendus II.

Selleks, et jääki ei tekiks, vähendame jagatavat 70 võrra 2008 – 70 = 1938
Kuna 1938 on kaksikalgarvude 6-kordne, siis kaksikalgarvude korrutis on 1938 : 6 = 323.
Kuna kolme järjestikuse naturaalarvu puhul on äärmiste korrutis 1 võrra väiksem keskmise ruudust, sest $(n – 1)(n + 1) = n^2 – 1$, siis on otsitavate algarvude vahelise kordarvu ruut 323 + 1 = 324 ja see kordarv ise on $\sqrt{324} = 18$.
Seega on otsitavad kaksikalgarvud 17 ja 19.
Hindamine:

tegevus	punkte
Võrrandi põhjendatud koostamine	2
Võrrandi lahendamine	2
Sobimatu lahendi ellimineerimine	1
Kaksikalgarvude paari leidmine	1
Kontroll	1
kokku	7

Märkus: Kui ülesanne on lahendatud ilma võrrandita (vt lahendus II või mõnel muul viisil) koos korrektsete põhjendustega, siis anda 7 punkti; kuid ilma põhjendusteta (leitud proovimise teel), anda õige vastuse ja korrektse kontrolli eest 4 punkti.

Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

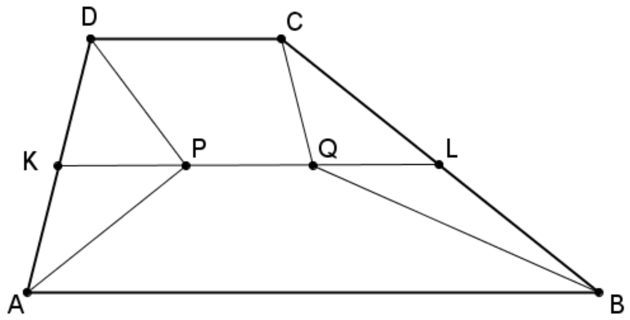
Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.

IX klass

Lahendusvõimalusi ja juhiseid hindamiseks.

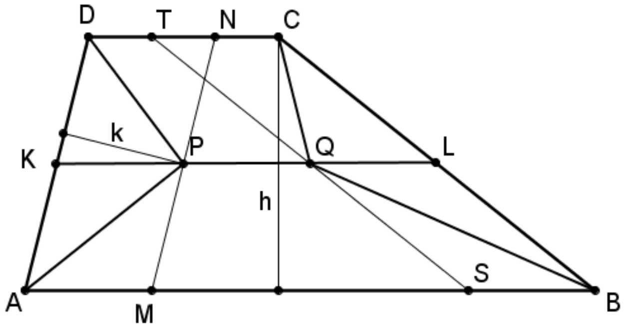
4.ülesanne

Trapetsi ABCD kesklõik KL on jaotatud punktidega P ja Q kolmeks võrdseks osaks. Punktid P ja Q on ühendatud trapetsi tippudega (vt joonist). Kui suure osa moodustavad tekkinud kolmnurkade APD ja BQC pindalad kokku trapetsi ABCD pindalast?



Lahendus.

Võtame läbi punkti P MN//AD ja läbi punkti Q TS//BC siis tekivad rööpkülikud AMND ja SBCT, sest teised külgede paarid on paralleelsed kui trapetsi alused. Kuna trapetsi kesklõik on paralleelne alustega, siis ka AMPK ja SBLQ on rööpkülikud ja AM = KP ja SB = QL kui rööpkülikute vastasküljed.



Kuna KP = PQ = QL=1/3 KL, siis ka AM = 1/3 KL ja SB=1/3 KL ning rööpkülikute AMND ja SBCT pindalad AM*h =1/3 KL*h ja SB*h =1/3 KL*h (kus h on trapetsi ABCD kõrgus) osutuvad omavahel võrdseteks ja seega on mõlemad rööpkülikud antud trapetsi ABCD pindalast KL*h üks kolmandik. Kolmnurgal APD ja röökülikul AMND on ühine alus AD ning sellele alusele tõmmatud võrdsed kõrgused k. Seega on kolmnurga APD pindala pool rööküliku AMND pindalast. Analoogiliselt on kolmnurga BQC pindala pool rööküliku SBCT pindalast. Sellest järeldub, et mõlema **kolmnurga APD ja BQC pindalad kokku on 1/3 kogu trapetsi ABCD pindalast.**

Hindamine:

tegevus	punkte
Joonise sobiv täiendamine	1
Põhjendamine, et tekkisid rööpkülikud AMND ja SBCT	1
Põhjendamine, et AM = KP ja QL = SB	1
Põhjendamine, et rööpkülikute AMND ja SBCT pindalad võrduvad kolmandikuga antud trapetsi ABCD pindalast	2
Põhjendamine, et kolmnurga APD pindala on pool rööküliku AMND pindalast ja kolmnurga BQC pindala pool rööküliku SBCT pindalast	1
Õige järeldus: kolmnurkade pindalade summa on kolmandik antud trapetsi pindalast	1
kokku	7

Märkus: Kui ülesande õige vastuseni on jõutud ainult ligikaudse arvutusega jooniselt mõõtmise abil, siis anda 2 punkti. Erinevate loogiliste arutluste puhul lähtuda põhjenduste korrektsusest.

Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA KOOLIVOOR

Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.

IX klass

Lahendusvõimalusi ja juhiseid hindamiseks.

5.ülesanne

Turist sattus saarele, kus oli ainult kaks küla. Tõevere küla elanikud rääkisid alati tõtt ja Valevere küla elanikud valetasid alati. Kuna saare elanikud olid kõik omavahel tuttavad, ei tekkinud neil sellisest omapärast mingeid arusaamatusi. Turist kohtas kaht saareelanikku A ja B omavahel jutlemas ja soovis saada selgust, kas nad on valetajad või tõerääkijad või üks seda ja teine teist. Ta küsis A käest: „Kas te olete mõlemad Tõevere küla elanikud?“ Saadud vastuse põhjal ei saanud turist siiski teha järeldust, mis meestega on tegu. Seepärast küsis ta B käest: “Kas te olete mõlemad ühest ja samast külast?“ Sellele saadud vastuse ja A-lt saadud esimese küsimuse vastuse põhjal oli täiesti selge, kes on kes.
Kes oli A ja kes oli B, kas tõerääkija või valetaja?

Lahendus.

Vaatleme kõiki võimalusi: A on tõerääkija ja B on tõerääkija, A on tõerääkija, aga B on valetaja jne. ning siis antavaid vastuseid nii esimesele kui teisele küsimusele. Tähistame vastavalt At ja Bt; At ja Bv jne.

olukord / küsimus	1.	2.	3.	4.
	At ja Bt	At ja Bv	Av ja Bt	Av ja Bv
A-le: „Kas te olete mõlemad Tõevere küla elanikud?“	A vastab: jah	A vastab: ei	A vastab: jah	A vastab: jah
B-le: “Kas te olete mõlemad ühest ja samast külast?“	B vastab: jah	B vastab: jah	B vastab: ei	B vastab: ei

Kuna esimese küsimuse ja A vastuse põhjal ei saanud teha selget otsust, kellega on tegu, siis ei saanud olla juhtum 2, kuna ainult sel korral olnuks A vastus eitav ja edasi poleks olnud vaja midagi küsida. Seega oli kas 1. või 3. või 4.juhtum. Kuna teise küsimuse ja B vastuse järel sai turist selguse kätte, siis pidi see vastus olema selline, mis erines ülejäänud kahest, seega juhtum nr 1. Seega olid nii A kui ka B Tõeverest pärit tõerääkijad.

Hindamine:

tegevus	punkte
Nelja erineva võimaluse ja vastavate A vastuste vaatlemine	2
Otsustus, miks oli vaja veel küsitleda	1
Nelja erineva võimaluse ja vastavate B vastuste vaatlemine	2
Otsustus, miks sai turist nüüd teha ainuõige järelduse.	1
Õige vastus	1
kokku	7